6 класс

6.1. Вычеркните из числа 987654321 как можно больше цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 15.

6.2. Сложите из пятиклеточных фигурок, среди которых нет двух одинаковых, какой-нибудь клетчатый квадрат.

6.3. В комнате 10 человек — лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Три человека сказали: «В комнате нечетное число лжецов»; а остальные семь сказали: «В комнате четное число рыцарей». Сколько рыцарей могло быть в комнате?

6.4. Можно ли в равенстве $0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} = 1$ заменить звездочки различными цифрами от 0 до 7 так, чтобы получилось верное равенство?

6.5. В ящике лежат шары трех цветов: красного, синего и зеленого, причем шаров каждого цвета хотя бы по одному. Известно, что среди любых 10 шаров найдется красный шар, а среди любых 20 шаров — синий. Какое наибольшее количество шаров могло лежать в ящике?

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

6 класс

6.1. Вычеркните из числа 987654321 как можно больше цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 15.

6.2. Сложите из пятиклеточных фигурок, среди которых нет двух одинаковых, какой-нибудь клетчатый квадрат.

6.3. В комнате 10 человек — лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Три человека сказали: «В комнате нечетное число лжецов»; а остальные семь сказали: «В комнате четное число рыцарей». Сколько рыцарей могло быть в комнате?

6.4. Можно ли в равенстве $0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} = 1$ заменить звездочки различными цифрами от 0 до 7 так, чтобы получилось верное равенство?

6.5. В ящике лежат шары трех цветов: красного, синего и зеленого, причем шаров каждого цвета хотя бы по одному. Известно, что среди любых 10 шаров найдется красный шар, а среди любых 20 шаров — синий. Какое наибольшее количество шаров могло лежать в ящике?

7 класс

7.1. Вырежьте из клетчатого квадрата 5×5 одну нецентральную клетку так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на 6 равных клетчатых фигурок, не являющихся прямоугольниками. Приведите пример такого разрезания.

7.2. Можно ли в равенстве $0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} = 2$ заменить звездочки различными цифрами от 1 до 9 так, чтобы получилось верное равенство?

7.3. В классе 26 школьников. Для школьной игры первому ученику дали 2 фишки. Второму — на 3 фишки больше. А каждому следующему давали либо на 3 фишки больше, либо на 3 меньше, чем предыдущему. Затем ученики как-то разбились на три команды. Могло ли оказаться, что суммарное число фишек в каждой команде оказалось одинаковым?

7.4. Турнир лучников проводился по следующим правилам. С каждого участника собрали одинаковый взнос. Организаторы турнира забрали $1/3$ от всех поступивших денег, а оставшиеся деньги пошли в призовой фонд турнира. Робин Гуд, победивший в турнире, получил больше каждого из остальных участников — $1/6$ от призового фонда, однако оказался в убытке. Какое количество лучников могло участвовать в турнире? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

7.5. В ящике лежат шары трех цветов: красного, синего и зеленого, причем шаров каждого цвета хотя бы по 2. Известно, что среди любых 10 шаров найдется красный шар, а среди любых 20 шаров — синий. Какое наибольшее количество шаров могло лежать в ящике?

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

7 класс

7.1. Вырежьте из клетчатого квадрата 5×5 одну нецентральную клетку так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на 6 равных клетчатых фигурок, не являющихся прямоугольниками. Приведите пример такого разрезания.

7.2. Можно ли в равенстве $0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} = 2$ заменить звездочки различными цифрами от 1 до 9 так, чтобы получилось верное равенство?

7.3. В классе 26 школьников. Для школьной игры первому ученику дали 2 фишки. Второму — на 3 фишки больше. А каждому следующему давали либо на 3 фишки больше, либо на 3 меньше, чем предыдущему. Затем ученики как-то разбились на три команды. Могло ли оказаться, что суммарное число фишек в каждой команде оказалось одинаковым?

7.4. Турнир лучников проводился по следующим правилам. С каждого участника собрали одинаковый взнос. Организаторы турнира забрали $1/3$ от всех поступивших денег, а оставшиеся деньги пошли в призовой фонд турнира. Робин Гуд, победивший в турнире, получил больше каждого из остальных участников — $1/6$ от призового фонда, однако оказался в убытке. Какое количество лучников могло участвовать в турнире? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

7.5. В ящике лежат шары трех цветов: красного, синего и зеленого, причем шаров каждого цвета хотя бы по 2. Известно, что среди любых 10 шаров найдется красный шар, а среди любых 20 шаров — синий. Какое наибольшее количество шаров могло лежать в ящике?

8 класс

8.1. В школе «Эксперимент» учащимся выставляют оценки от 1 до 5. Борис получил по контрольной двойку. Учитель заметил, что, если ему изменить эту двойку на пятерку, то средний балл по контрольной среди Борисов в классе увеличится ровно в два раза. Сколько Борисов писало контрольную?

8.2. Можно ли заменить в пяти равенствах вида $* + * + * = * + *$, все звездочки на натуральные числа от 1 до 25 так, чтобы все равенства получились верными, а каждое из чисел использовалось ровно 1 раз?

8.3. Докажите, что существует лишь конечное количество пар натуральных чисел (a, b), для которых справедливо равенство $a(a+b) = (2^{2017} + 3^{2017})b$.

8.4. На катете BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle BCA = 90^\circ$) выбраны точки M и N так, что $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB$. Прямая, проходящая через точку M, пересекает отрезки AN и AB в точках E и F соответственно. Найдите AB, если $AE = a$, $\angle ANB = 130^\circ$ и $\angle BFM = 110^\circ$.

8.5. В клетках доски 8×8 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке — по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В одной из соседних со мной клеток стоит лжец». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число лжецов могло стоять на доске?

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

8 класс

8.1. В школе «Эксперимент» учащимся выставляют оценки от 1 до 5. Борис получил по контрольной двойку. Учитель заметил, что, если ему изменить эту двойку на пятерку, то средний балл по контрольной среди Борисов в классе увеличится ровно в два раза. Сколько Борисов писало контрольную?

8.2. Можно ли заменить в пяти равенствах вида $* + * + * = * + *$, все звездочки на натуральные числа от 1 до 25 так, чтобы все равенства получились верными, а каждое из чисел использовалось ровно 1 раз?

8.3. Докажите, что существует лишь конечное количество пар натуральных чисел (a, b), для которых справедливо равенство $a(a+b) = (2^{2017} + 3^{2017})b$.

8.4. На катете BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle BCA = 90^\circ$) выбраны точки M и N так, что $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB$. Прямая, проходящая через точку M, пересекает отрезки AN и AB в точках E и F соответственно. Найдите AB, если $AE = a$, $\angle ANB = 130^\circ$ и $\angle BFM = 110^\circ$.

8.5. В клетках доски 8×8 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке — по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В одной из соседних со мной клеток стоит лжец». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число лжецов могло стоять на доске?

9 класс

9.1. Можно ли в равенстве $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot8\cdot9\cdot10=11\cdot12\cdot13\cdot\ldots\cdot20$ вычеркнуть из левой части один сомножитель, а из правой — несколько так, чтобы получилось верное равенство?

9.2. На доске написано натуральное число b. Про него сказали три утверждения:

1) это число четное;
2) это число меньше 102;
3) уравнение $x^2+20x+b=0$ имеет хотя бы один корень.

Какое наибольшее число может быть написано на доске, если из этих трех утверждений ровно два — верные?

9.3. Из точки A провели касательные AB и AC к окружности с центром O (здесь B и C — точки касания). Точка M — середина отрезка AO. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABM, касается прямой AC.

9.4. Даны различные положительные числа a, b, c, d такие, что $a+b>c+d$. Докажите, что $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{a}{d}+\frac{b}{c}>4$.

9.5. В клетках доски 7×7 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке — по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В соседних со мной клетках нет рыцарей». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число рыцарей могло стоять на доске?

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

9.1. Можно ли в равенстве $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot8\cdot9\cdot10=11\cdot12\cdot13\cdot\ldots\cdot20$ вычеркнуть из левой части один сомножитель, а из правой — несколько так, чтобы получилось верное равенство?

9.2. На доске написано натуральное число b. Про него сказали три утверждения:

1) это число четное;
2) это число меньше 102;
3) уравнение $x^2+20x+b=0$ имеет хотя бы один корень.

Какое наибольшее число может быть написано на доске, если из этих трех утверждений ровно два — верные?

9.3. Из точки A провели касательные AB и AC к окружности с центром O (здесь B и C — точки касания). Точка M — середина отрезка AO. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABM, касается прямой AC.

9.4. Даны различные положительные числа a, b, c, d такие, что $a+b>c+d$. Докажите, что $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{a}{d}+\frac{b}{c}>4$.

9.5. В клетках доски 7×7 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке — по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В соседних со мной клетках нет рыцарей». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число рыцарей могло стоять на доске?

10 класс

10.1. Числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ разбили на 50 пар, и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из этих пятидесяти сумм может делиться на 20?

10.2. Ненулевые числа a, b, c образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Докажите, что уравнение $ax^2 + 2\sqrt{2}bx + c = 0$ имеет два решения.

10.3. Можно ли какое-нибудь число вида $10000\ldots00001$ представить в виде $x!+y!+z!$, где x, y, z — натуральные числа? (Как обычно, через $n!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

10.4. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке K, а стороны AC — в точке T. На меньшей дуге TK выбрана точка P. Прямая, проходящая через точку K параллельно прямой AP, вторично пересекает окружность в точке N. Найдите PK, если известно, что $AP = a$ и $KN = b$.

10.5. Вася придумал новый корабль для морского боя — *«боевой бублик»*. Этот корабль состоит из всех клеток квадрата 3×3, кроме его центральной клетки. На поле 8×8 разместили один боевой бублик. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантированно его ранить?

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

10.1. Числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ разбили на 50 пар, и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из этих пятидесяти сумм может делиться на 20?

10.2. Ненулевые числа a, b, c образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Докажите, что уравнение $ax^2 + 2\sqrt{2}bx + c = 0$ имеет два решения.

10.3. Можно ли какое-нибудь число вида $10000\ldots00001$ представить в виде $x!+y!+z!$, где x, y, z — натуральные числа? (Как обычно, через $n!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

10.4. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке K, а стороны AC — в точке T. На меньшей дуге TK выбрана точка P. Прямая, проходящая через точку K параллельно прямой AP, вторично пересекает окружность в точке N. Найдите PK, если известно, что $AP = a$ и $KN = b$.

10.5. Вася придумал новый корабль для морского боя — *«боевой бублик»*. Этот корабль состоит из всех клеток квадрата 3×3, кроме его центральной клетки. На поле 8×8 разместили один боевой бублик. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантированно его ранить?

11 класс

11.1. Найдите все значения параметра a, для которых найдётся такое число β, что числа $\sin\beta$ и $2\cos\beta$ являются различными корнями уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$.

11.2. По итогам волейбольного турнира, проведенного в один круг (т. е. каждая команда сыграла с каждой одну игру), оказалось, что первые три команды выиграли у каждой из остальных команд, а сумма очков, набранных первыми тремя командами, на 3 больше, чем сумма очков, набранных остальными командами. Сколько всего команд участвовало в турнире, если известно, что их больше трех? (За победу в игре дается 1 очко, за поражение — 0; ничьих в волейболе не бывает.)

11.3. Положительные числа x и y, меньшие $1/2$, удовлетворяют неравенству $y^2 - x^2 > y - x$. Докажите, что они удовлетворяют и неравенству $y^3 - x^3 > y - x$.

11.4. В параллелепипеде отмечена одна вершина. Какое наибольшее количество остальных вершин может находиться на одном и том же расстоянии от отмеченной?

11.5. Вася придумал новый корабль для морского боя — *«боевой бублик»*. Этот корабль состоит из всех клеток квадрата 3×3, кроме его центральной клетки. На поле 10×8 разместили один боевой бублик. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантированно его ранить?

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

11.1. Найдите все значения параметра a, для которых найдётся такое число β, что числа $\sin\beta$ и $2\cos\beta$ являются различными корнями уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$.

11.2. По итогам волейбольного турнира, проведенного в один круг (т. е. каждая команда сыграла с каждой одну игру), оказалось, что первые три команды выиграли у каждой из остальных команд, а сумма очков, набранных первыми тремя командами, на 3 больше, чем сумма очков, набранных остальными командами. Сколько всего команд участвовало в турнире, если известно, что их больше трех? (За победу в игре дается 1 очко, за поражение — 0; ничьих в волейболе не бывает.)

11.3. Положительные числа x и y, меньшие $1/2$, удовлетворяют неравенству $y^2 - x^2 > y - x$. Докажите, что они удовлетворяют и неравенству $y^3 - x^3 > y - x$.

11.4. В параллелепипеде отмечена одна вершина. Какое наибольшее количество остальных вершин может находиться на одном и том же расстоянии от отмеченной?

11.5. Вася придумал новый корабль для морского боя — *«боевой бублик»*. Этот корабль состоит из всех клеток квадрата 3×3, кроме его центральной клетки. На поле 10×8 разместили один боевой бублик. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантированно его ранить?